Procesy stochastyczne
Lista 2

Poniżej W_t, $t \geq 0$ oznacza proces Wienera.

Zad 1. Pokazać, że $E(W_t W_s) = \min\{s,t\}$ oraz $E(|W_t - W_s|^2) = |t-s|$. Wyznaczyć $E(W_t^4)$.

Zad 2. Wyznaczyć rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + W_7$.

Zad 3. Dla jakich parametrów a i b, zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?

Zad 4. Wyznaczyć rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Zad 5 (Prawo wielkich liczb dla procesu Wienera). Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$. Wyciągnąć stąd wniosek, że dla dowolnych ustalonych liczb $a, b > 0$ $P(-at < W_t < bt$ dla dostatecznie dużych $t) = 1$.

Zad 6. Pokazać, ża następujące procesy sa procesami gaussowskimi i wyznaczyć ich funkcje kowariancji:

a) $X_t = f(t)g$, gdzie $f : T \to \mathbb{R}$ dowolna funkcja oraz $g \sim \mathcal{N}(0,1)$;

b) *most Browna* $X_t = W_t - tW_1$, $0 < t < 1$.

Zad 7. Pokazać, że istnieją nieskorelowane zmienne losowe $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ takie, że wektor (X,Y) nie ma rozkładu gaussowskiego.

Zad 8. Udowodnić, że następujące procesy są procesami Wienera:
$X_t = -W_t$ (odbicie);
$Y_t := \frac{1}{c} W_{c^2 t}$, $c > 0$ (przeskalowanie czasu);
$Z_t := \begin{cases} tW_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ (inwersja czasu);
$U_t := W_{t+T} - W_T$, $T > 0$ (przesunięcie w czasie);
$V_t := \begin{cases} tW_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$, gdzie $T \geq 0$ (odbicie po pewnym czasie).

Zad 9. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera sa nieograniczone.

Zad 10. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciagłe na $[0, \infty)$.

Zad 11. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są funkcjami nigdzie nieróżniczkowalnymi.

Zad 12. Pokazać, że zbiory postaci $\{x : x_t > x_s\}$, $\{x : x_{t_1} > 0, x_{t_2} - x_{t_1} > 0, ..., x_{t_n} - x_{t_{n-1}} > 0\}$, $\{x : x_t \leq x_s$ dla wszystkich wymiernych s, t takich, że $0 \leq s < t\}$ należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.

Zad 13. Udowodnić, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subseteq T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$, to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

Zad 14. Niech $T = [a,b]$, $a < t_0 < b$. Wykazać, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T : \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| < t\}, \qquad A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \mapsto x(t) \text{ ciągłe na } [a,b]\},$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T : \lim_{t\to t_0} x(t) = 0\}, \qquad A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \mapsto x(t) \text{ ciągłe w } t_0\}.$$

Zad 15. Niech $C(T)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na $T = [a,b]$. Wykazać, że $\mathcal{F} = \{A \cap C(T) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na $C(T)$. Sprawdzić, że przecięcia zbiorów z zadania 14 z $C(T)$ są mierzalne względem tego σ-ciała.

Zad 16. Wykazać, że istnieje proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że przyrost $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź też procesem 1-stabilnym).